第 2 节 直线与圆的位置关系（★★）

强化训练

1．（2023 • 全国模拟 • ★）直线 $x+2y+3=0$ 与圆 $x^2+(y+1)^2=1$ 的位置关系是（　　）

（A）相交　（B）相切　（C）相离　（D）不能确定

答案：A

解析：由题意，圆心 $(0,-1)$ 到直线的距离 $d=\dfrac{|-2+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}<1$，所以直线与圆相交.

2．（2022 • 浙江温州模拟 • ★）已知直线 $kx-y+k-1=0$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 有两个不同的交点，则实数 k 的取值范围是（　　）

（A）$[-\dfrac{3}{4},0]$　（B）$(0,\dfrac{3}{4})$　（C）$[0,\dfrac{3}{4}]$　（D）$(-\dfrac{3}{4},0)$

答案：B

解析：直线与圆有两个交点可翻译成 $d<r$，故先求 d，

圆心 $(2,0)$ 到所给直线的距离 $d=\dfrac{|2k+k-1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\dfrac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}}$，$r=1$，由题意，$\dfrac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}}<1$，解得：$0<k<\dfrac{3}{4}$.

3．（2022 • 陕西西安模拟 • ★★）圆 $C:x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 与直线 $l:y-2tx+2t-1=0(t\in\mathbf{R})$ 的位置关系为（　　）

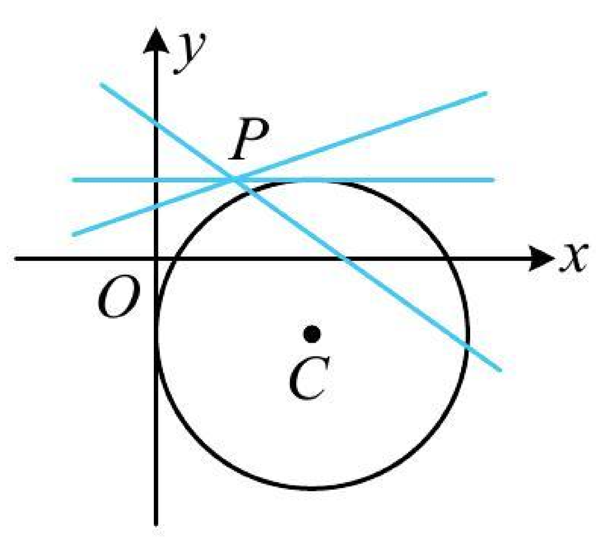
（A）相切　（B）相离　（C）相交　（D）与 t 有关

答案：D

解析：直线含参，先看是否过定点，$y-2tx+2t-1=0\Rightarrow y-1-2t(x-1)=0\Rightarrow$ 直线 l 过定点 $P(1,1)$，

点 P 与圆 C 的位置关系决定直线 l 与圆 C 可能的位置关系，故将 P 代入圆 C 的方程来看，

因为 $1^2+1^2-4\times1+2\times1+1=1>0$，所以点 P 在圆 C 外，如图，l 与圆 C 的位置关系不确定，与 t 有关.



【反思】对于定圆 C，当直线 l 绕定点 P 旋转时：①若 P 在圆 C 内，则直线 l 与圆 C 必定相交；②若 P 在圆 C 上，则直线 l 与圆 C 相切或相交；③若 P 在圆 C 外，则直线 l 与圆 C 相离、相切或相交均有可能.

4．（2022 •内蒙古呼和浩特模拟 •★★）已知直线 $l:x+3y+5=0$ 与圆 $C:x^2+y^2+2x-4y-20=0$ 相交于 A，B 两点，若该圆的一条直径过弦 AB 的中点，则这条直径所在直线的方程为（　　）

（A）$3x+y+1=0$　（B）$3x-y+3=0$　（C）$3x-y+5=0$　（D）$x+3y-5=0$

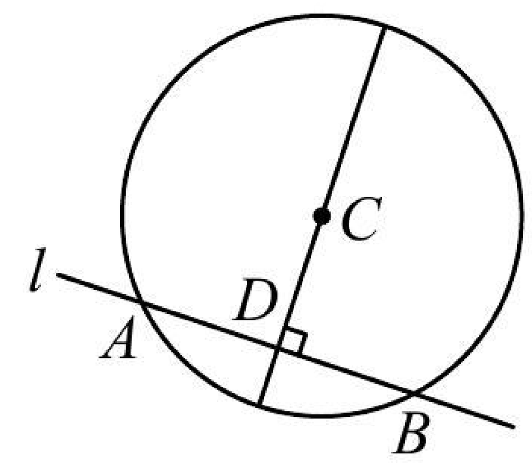
答案：C

解析：$x^2+y^2+2x-4y-20=0\Rightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=25\Rightarrow$圆心为$C(-1,2)$，

有了一个点，求直线还差斜率，涉及弦中点，可由垂径定理构建垂直关系来算斜率，

如图，设AB中点为D，则$CD\perp l$，$x+3y+5=0\Rightarrow y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{5}{3}\Rightarrow$直线$l$的斜率为$-\dfrac{1}{3}$，

所以直线CD的斜率为3，结合$C(-1,2)$可得直线CD的方程为$y-2=3[x-(-1)]$，整理得：$3x-y+5=0$.



5.（2023·辽宁模拟·★★）已知直线$l:x-2y+3=0$与圆$C:x^2+y^2-2x-6y+6=0$相交于A，B两点，则$|AB|=$（　　）

（A）$\dfrac{16\sqrt{5}}{5}$　　（B）$\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$　　（C）$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$　　（D）$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

答案：B

解析：计算直线被圆截得的弦长，用公式$L=2\sqrt{r^2-d^2}$，

由题意，圆C的方程可化为$(x-1)^2+(y-3)^2=4$，所以圆心$C(1,3)$到直线l的距离$d=\dfrac{|1-2\times3+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，

所以$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-\dfrac{4}{5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$.

6.（2020·天津卷·★★）已知直线$x-\sqrt{3}y+8=0$和圆$x^2+y^2=r^2(r>0)$相交于A，B两点，若$|AB|=6$，则r的值为_____.

答案：5

解析：涉及弦长，用公式$L=2\sqrt{r^2-d^2}$处理，先求d，由题意，圆心到直线的距离$d=\dfrac{|8|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=4$，

所以$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{r^2-16}$，因为$|AB|=6$，所以$2\sqrt{r^2-16}=6$，结合$r>0$可得$r=5$.

7.（2023·河北衡水模拟·★★）已知直线$l:y=3x$与圆$C:x^2+y^2-4y=0$相交于A，B两点，则ΔABC的面积为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　（B）$\dfrac{6}{5}$　　（C）$\dfrac{2\sqrt{38}}{5}$　　（D）5

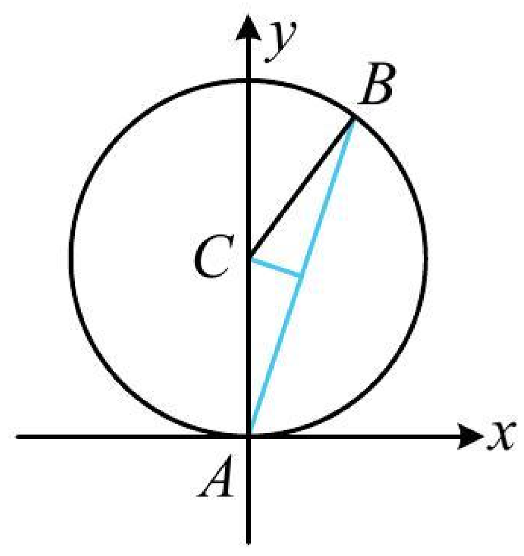
答案：B

解析：如图，可以AB为底，点C到直线AB的距离为高来计算ΔABC的面积，

由题意，圆C的方程可化为$x^2+(y-2)^2=4$，圆心为$C(0,2)$，半径$r=2$，

所以圆心C到直线l的距离$d=\dfrac{|-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{10}}$，故$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-\dfrac{2}{5}}=\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{6}{5}$.



8.（★★）设圆 $C:x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线 l 过点 $(0,3)$ 且被圆 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，则 l 的方程为_____.

答案： $x=0$ 或 $3x+4y-12=0$

解析： $x^2+y^2-2x-2y-2=0\Rightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=4$，所以圆 C 的圆心为 $(1,1)$，半径 $r=2$，

弦长 $L=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3}\Rightarrow$ 圆心 C 到 l 的距离 $d=1$，

l 过点 $(0,3)$，求方程还差斜率，先考虑斜率不存在的情况，

当 $l\perp x$ 轴时，其方程为 $x=0$，满足题意；

当 l 斜率存在时，设其方程为 $y=kx+3$，即 $kx-y+3=0$，

此时 $d=\frac{|k-1+3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$，所以 $\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得：$k=-\frac{3}{4}$，

故直线 l 的方程为 $y=-\frac{3}{4}x+3$，整理得：$3x+4y-12=0$.

9.（★★）圆 $C:x^2+y^2+2y-3=0$ 被直线 $l:x+y-k=0$ 分成长度之比为 $1:3$ 的两段圆弧，则实数 $k=$_____.

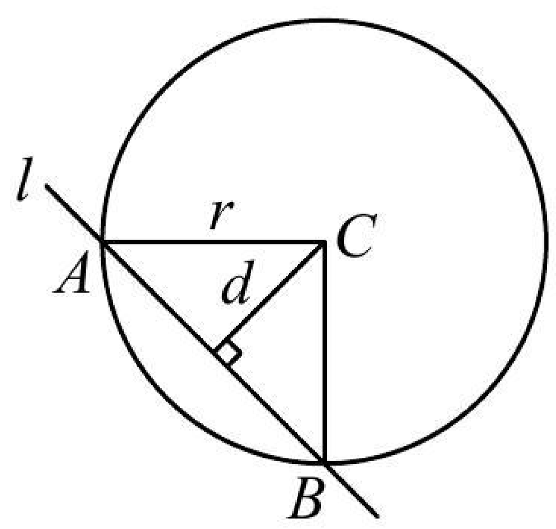
答案： -3 或 1

解析： $x^2+y^2+2y-3=0\Rightarrow x^2+(y+1)^2=4$，所以圆心为 $C(0,-1)$，半径 $r=2$，

两段圆弧的比例决定了圆心角，圆心角又与圆心到直线的距离 d 有关，故可由此求出 d，

如图，l 把圆 C 分成 $1:3$ 的两段圆弧 $\Rightarrow\angle ACB=90^\circ\Rightarrow\Delta ABC$ 为等腰直角三角形，所以 $d=\frac{\sqrt{2}}{2}r=\sqrt{2}$，

又 $d=\frac{|-1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|1+k|}{\sqrt{2}}$，所以 $\frac{|1+k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，解得：$k=-3$ 或 1.



10.（★★★）若关于 x 的方程 $x-b=\sqrt{1-x^2}$ 恰有 1 个实数解，则实数 b 的取值范围是（　　）

（A）$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　　（B）$[-1,\sqrt{2}]$　　（C）$(-1,1]\cup\{\sqrt{2}\}$　　（D）$(-1,1]\cup\{-\sqrt{2}\}$

答案： D

解析：问题等价于直线$l: y=x-b$与曲线$y=\sqrt{1-x^2}$恰有1个交点，曲线的方程带根号，先平方去根号，

$y=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow y^2=1-x^2\Rightarrow x^2+y^2=1(y\ge 0)$，该方程表示单位圆的上半部分，可画图分析临界状态，

如图，满足条件的直线l可在l_2（不可取）和l_3（可取）之间，或恰好为l_1，

注意到$-b$是直线l在y轴上的截距，所以当直线l在l_2和l_3之间时，$-1\le -b<1$，故$-1<b\le 1$；

直线l_1与半圆相切，$y=x-b\Rightarrow x-y-b=0$，所以原点到直线l_1的距离$d=\dfrac{|-b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1$，解得：$b=\pm\sqrt{2}$，

由图可知，l_1的纵截距为正$\Rightarrow -b=\sqrt{2}\Rightarrow b=-\sqrt{2}$；

综上所述，实数b的取值范围是$(-1,1]\cup\{-\sqrt{2}\}$.